Más de veinte siglos de geometría

Jesús Hernández
1 octubre, 1997

Elementos
EUCLIDES
Editorial Gredos, Madrid
Introduccio?n de Luis Vega Trad. y notas de Ma Luisa Puertas

Con la publicación del tercero de estos libros ha culminado una tarea que es, como veremos en lo que sigue, digna de todo elogio: la primera traducción *íntegra* al castellano de uno de los clásicos de la cultura occidental, los *Elementos* de Euclides. El primer volumen, con los libros I-IV precedidos de una larga introducción, salió en 1991; el segundo, con los V-IX, en 1994, y el tercero, con los X-XIII, el año pasado. Los ha publicado una colección de clásicos griegos y latinos, en amena vecindad con obras maestras de la literatura, la filosofía y la historia; algo que agradecemos, y mucho, los aficionados a la historia de la ciencia. Es de desear que la editorial, una vez emprendido, no se detenga en el buen camino; difícil, entonces, encontrar un candidato mejor que Arquímedes para la continuación. Por lo que sabemos, no ha sido traducido al castellano, con la excepción del *Método,* del que hay en cambio dos ediciones: la del presentador de esta obra para Alianza (1986) y la hecha más tarde por Pedro González Urbaneja y J. Vaqué para la Universidad Autónoma de Barcelona (1993), que incluye el texto original.

Los *Elementos* son un clásico de la ciencia, como los *Principia* de Newton o algunas obras de Galileo o Darwin. Pero les lleva una considerable ventaja en la antigüedad, tan importante en todos los escalafones: unos veinte siglos, más o menos, de vida y casi otros tantos de vigencia. Porque, como hoy tiende a olvidarse –no por nada en particular, hoy tiende a olvidarse *todo*– el libro de Euclides no sólo sirvió de modelo, de referencia, de paradigma (también en sentido kuhniano) para la matemática durante muchos siglos, sino que siguió siendo empleado como libro de texto hasta épocas muy recientes: todavía hacia 1860 una comisión de la que formaba parte el ilustre geómetra italiano Luigi Cremona (que después sería ministro de Instrucción Pública) recomendaba «no enturbiar la pureza de la Geometría griega transformando los teoremas geométricos en fórmulas algebraicas». La obra debe figurar en esas listas, de las que siempre se desconfía un poco, de los libros más editados y traducidos de la historia de la humanidad: la *Biblia,* la *Odisea,* el *Quijote...*

De su autor, Euclides, se sabe muy poco: que era más joven que los discípulos de Platón y mayor que Arquímedes, se le sitúa en torno al 300 a. de C. Esto, y que hizo escuela en Alejandría, es casi todo lo que puede decirse. Hay alguna anécdota de autenticidad dudosa, como la del «no hay camino real en geometría» en respuesta al rey que se lo solicitaba. Con acertada expresión de E. M. Forster en su guía de Alejandría: «Nada sabemos de él: a decir verdad, hoy lo consideramos como una rama del saber más que como un hombre».

Se ha discutido también acerca de su verdadera importancia, ¿fue un mero compilador que se limitó a poner orden en un cuerpo de conocimientos ya elaborado o se trata por el contrario de un creador genial que fundó una ciencia y le dio su modelo para los veinte siglos siguientes?

En cualquier caso los *Elementos,* que no son la primera obra en su género, organizan y desarrollan conocimientos anteriores, sobre todo de Teeteto y Eudoxo. Hacen honor, en varios de los sentidos de la palabra, a su título: no se incluye todo lo que se sabe, sino que hay una selección, hay que quedarse con lo esencial, ser conciso, formular los teoremas en versiones generales simples sin perderse en un sinfín de particulares... En los años treinta de nuestro siglo algunos de los mejores matemáticos franceses, escondidos tras el pseudónimo colectivo de Nicolas Bourbaki, emprendieron la publicación de unos *Elementos de matemática* –título nada inocente– que participaba de estas cualidades.

Puede elucubrarse sobre los fines perseguidos por Euclides con su obra. No hay en ella ninguna «declaración de principios» ni tampoco se dice nada de la aplicación de la matemática en otros lugares, puede ayudar si acaso el testimonio, que debe ser filtrado críticamente, de algún comentarista posterior, como Proclo. Es patente, en cambio, la intención didáctica y el deseo de enseñar a construir la matemática por medio de las demostraciones.

Como es bien sabido, este magno edificio se abre con un pórtico formado por tres componentes, *definiciones, postulados* y *nociones comunes.* Vienen a continuación las demostraciones de los teoremas (y de los problemas de construcción) presentadas de una manera que se puede calificar de canónica, y que ha sido tenida como tal hasta hoy; Proclo distingue incluso seis partes de la demostración, todas las cuales se manifiestan en sus ejemplos más logrados. La demostración, ese argumento encadenado en que se llega a una conclusión justificando todos y cada uno de los eslabones, es una nota distintiva de la matemática, tal vez la fundamental. Para los Bourbaki, ya en esta época queda fijado el *canon* de la matemática, que alcanzará su perfección en los grandes clásicos (Euclides, Arquímedes, Apolonio): «La noción de demostración en estos autores no se diferencia en nada de la nuestra». La impronta de este método puede rastrearse en otros lugares y autores, desde la medicina de Galeno hasta la ética *more geometrico* de Spinoza. Alguna vez se ha dicho que Euclides ha sido menos un profesor de geometría que uno de lógica.

Y llega, siguiendo caminos descritos en la introducción, hasta esa «matemática moderna» de nuestros días que ha tenido incluso su reflejo en la enseñanza elemental, en la que tanto peso conserva la presentación axiomática. A lo largo del siglo XIX aparecieron varias exposiciones sistemáticas de la geometría que, pasando por la de Pasch (1882), culminaron en los *Fundamentos de la Geometría* (1899) de David Hilbert, uno de los matemáticos más grandes de la época, obra cuya influencia en el «álgebra moderna», y en la matemática contemporánea en general, sería difícil exagerar.

En la introducción se trata con detalle, y creemos que con acierto, la «axiomatización» de Euclides y se subrayan sus aspectos intuitivos e informales. No es sólo que se asegure sin base para ello que ciertas circunferencias deben cortarse necesariamente (uno de los primeros defectos señalados por los comentaristas), sino que se echa en falta una perspectiva axiomática global. Sí cabe hablar, en cambio, de sistematización y *organización* de partes de la matemática. La interpretación de A. Szabó de este método como expresión de la tendencia de la dialéctica eleática hacia la abstracción conceptual, en contraste con las pruebas empíricas o visuales anteriores, es expuesta con cierto despego, no del todo compartido por quien esto escribe. También se echa de menos una concepción general del espacio geométrico, que se haría esperar hasta el siglo XIX .

Todas estas consideraciones pueden ayudar en la lectura de los *Elementos* que podamos hacer hoy, y en la valoración tanto de sus contenidos como de ciertas ausencias: en los libros dedicados a la aritmética no aparece ninguna forma del principio de inducción, ni tampoco un enunciado del teorema fundamental que asegura la descomposición única de un número entero en factores primos; en cambio, su admirable demostración de que hay infinitos números primos sigue dándose hoy. Otra cuestión ardua, sobre la que se sigue discutiendo, es la relación que puede haber entre las magnitudes inconmensurables –de las que es ejemplo ilustre la pareja formada por el lado de un cuadrado y su diagonal– y los números irracionales tal y como fueron presentados por los grandes matemáticos del siglo XIX (Dedekind, Cantor, etc.).

La presentación se debe a Luis Vega, alguien que ha estudiado a fondo la historia de la lógica y es autor de un libro, *La trama de la demostración* (Alianza, 1990), sobre el período griego. La *Introducción,* de casi 200 páginas, cubre muchos de los asuntos suscitados por el libro y analiza con detalle tanto el texto (tarea continuada después en las notas) como sus variados contextos. No sólo se examina el contenido de los libros, sino también las diferencias de todo tipo entre ellos y las variadas formas de coherencia y orden en la disposición de los resultados matemáticos. También se debaten muchas cuestiones derivadas, como la tan trillada del «álgebra geométrica» griega o todo lo relativo al famoso quinto postulado, del que se dan numerosos enunciados equivalentes y que es seguido a lo largo de la historia hasta llegar a la creación de las geometrías no euclídeas por Gauss, Bolyai y Lobatchevski hacia 1830, una de las mayores revoluciones conceptuales de la matemática, con implicaciones que llegan hasta la teoría de la relatividad.

La traducción es presentada como la primera hecha al castellano del texto *completo* de la obra. Ha habido varias parciales, la primera impresa en 1576, que son estudiadas con detalle. En una de ellas encontramos al capitán Larrando de Mauleón diciendo (en 1698) que «es la geometría… una de las partes de la Matemática que es más conveniente a un Monarca… Toda la razón de estado es ciega sin el conocimiento de esta nobilísima ciencia». Es poco probable que el pobre Carlos II llegara a leer estas líneas, pero si así fue, ¿qué pasaría por los restos de su turbia mente?

La versión se debe a María Luisa Puertas, catedrática de griego de instituto, quien también ha puesto numerosas notas. Poco podemos añadir a los elogios de Carlos García-Gual, pero sí queremos señalar que su autora ha tenido en cuenta todo el movimiento que ha tenido lugar también dentro de la historia de la matemática griega y que da las gracias a varios de sus mayores representantes (G. E. R. Lloyd, I. Mueller, D. E. Fowler) por sus consejos. Este primor se manifiesta en algunas elecciones terminológicas, pero también en el estilo general adoptado, que excluye el uso indiscriminado del lenguaje contemporáneo sin más, del anacronismo. En cuanto a las primeras, puede señalarse la distinción entre «ser tangente» y «tocar» (I, pág. 291) y sobre todo el empleo de «no racionalmente expresable» en vez del habitual «irracional», debidamente justificado (III, pág. 10, nota).

La extensa introducción se prolonga en abundantes, y a veces largas, anotaciones. Algunas se refieren a aspectos filológicos, pero la mayoría son matemáticas, históricas o culturales. Son muy variadas: a los teoremas que dicen que dos figuras planas pueden tener la misma superficie sin tener el mismo perímetro se añade el comentario de que eso muestra el error de los navegantes que, según Tucídides, calculaban el área de una isla a partir del tiempo que se tardaba en dar la vuelta. Pero las más extensas se refieren a muchos argumentos matemáticos relacionados con el texto: al muy famoso de la cuadratura del círculo, a algunas relaciones posibles con las geometrías de Riemann, a las relaciones con los postulados de continuidad de los números reales, al contexto del teorema de Pitágoras y sus manifestaciones en otras culturas. El problema del *análisis* y la *síntesis,* uno de los más importantes y sutiles de la matemática clásica, es también objeto de glosa competente. Finalmente, se aprovecha la circunstancia de que el último libro termina con la demostración de que hay exactamente cinco poliedros regulares –ni uno más ni uno menos– para seguir la huella de estas ideas hasta nuestros días y concluir brillantemente la nota, y el libro, con la afirmación del carácter de *clásico* de los *Elementos.* A resaltarlo han contribuido, con rigor y buen gusto ejemplares, sus presentadores.