

¿Hubo una crisis en la matemática del siglo XX?

Posted on 1 de diciembre de 2000 by José M. Ferreirós

Algunos desarrollos de la ciencia en el siglo XX han alcanzado una gran repercusión pública, al menos entre el público ilustrado. Es el caso de las revoluciones de la física (teorías de la relatividad y teorías cuánticas), es el caso de la biología molecular, la genética y sus aplicaciones (estructura del ADN, ingeniería genética), y es el caso también de la célebre *crisis de fundamentos* en matemáticas, durante el primer tercio del siglo XX.

La historia popular de este último episodio habla del esfuerzo y los sufrimientos de unos pocos por introducir rigor lógico en matemáticas, y por investigar lo infinito bajo la forma de la teoría de conjuntos; de la dramática aparición hacia 1900 de las paradojas lógicas o conjuntistas, que pusieron en tela de juicio el objetivo apenas logrado; y de la subsiguiente confusión y lucha de escuelas, aparentemente irreconciliables, en la búsqueda de soluciones a la crisis. El fenómeno resultó sorprendente y casi hipnótico para quienes tuvieron noticia de él, ya que en la matemática, considerada antes paradigma de certeza, evidencia y acuerdo, se abría la caja de Pandora y aparecían dudas, inseguridades, desacuerdos, incertidumbres. Todo un modelo del cambio en la concepción del conocimiento que ha tenido lugar en el siglo XX, de la emergencia de concepciones falibilistas, del sentimiento de pérdida de la certidumbre que se ha instalado en la conciencia de los matemáticos y científicos más reflexivos.

Claro está que esa visión histórica ha resultado siempre chocante para la mayoría de quienes se ocuparon activamente de las matemáticas en los años veinte, treinta o cuarenta. Para el investigador matemático, fue una época de desarrollo enorme y avances continuados, de explotación de las grandes posibilidades de una nueva manera de hacer matemáticas. Sí, estaban aquellas dudas escépticas sobre las cuestiones de fundamentos, pero eran cosas que se discutían en charlas de café y que no afectaban en absoluto a la práctica de la investigación. Se trataba de problemas de detalle, cuestión de refinar un poco los principios empleados y dar así con la solución; en fin, lo normal en cualquier parte de las matemáticas. Y bien, es verdad que la perspectiva más prometedora, la del programa metamatemático de Hilbert, acabó encontrando dificultades casi insalvables en los celeberrimos teoremas de incompletud de Gödel... Aquí el investigador tiene más difícil la justificación de su actitud práctica, pero acude a una respuesta consoladora: hay que dejar esos asuntos al lógico y al filósofo, pues a fin de cuentas no afectan al matemático en activo.

El libro todavía reciente de Javier de Lorenzo, ofrece una reflexión profunda acerca de aquellos desarrollos y aquella época, gracias a la cual se supera la aparente antítesis entre las dos visiones apuntadas. Javier de Lorenzo ha consagrado su vida y su trabajo académico a la reflexión en torno a las matemáticas, su historia y su filosofía. Desde su primer libro, publicado en 1971, se han sucedido múltiples contribuciones suyas al tema, hasta el punto de ser quizá el único autor español de quien se puede decir que ha mantenido una ocupación tan prolongada y dedicada con este complejo tema de trabajo. Su actividad no cesa, ya que últimamente está detrás de las interesantes jornadas que anualmente se dedican a cuestiones matemáticas en la Cátedra Sánchez-Mazas de la Universidad del País Vasco. Comprenderá el lector que se trata de una persona idónea para ofrecernos sus consideraciones, meditadas y reflexionadas desde una atalaya privilegiada, acerca de lo que es la matemática, de cómo se ha desarrollado su historia, de los problemas que suscita y de las respuestas que cabe darles.

La primera consideración crítica que establece De Lorenzo tiene que ver con la triple metáfora arquitectónica que se esconde tras la expresión «crisis de fundamentos». Se está concibiendo a la matemática como un edificio único, a los estudios de lógica y teoría de conjuntos como el basamento del mismo, y a los problemas y discusiones surgidos en el período 1900-1930 como una crisis de los fundamentos. La implicación es que el edificio estaba al borde del colapso, y que naturalmente los habitantes hubieron de ser desalojados. De ahí la extrañeza de quienes vivieron aquellos años cómodamente instalados en sus habitaciones, sin sentir la necesidad de hacer cambios que no fueran cambios de estilo y color en la decoración y los muebles. Frente a la metáfora del edificio, De Lorenzo comenta la metáfora de la matemática como ciudad, propuesta por los integrantes del grupo Bourbaki, que nos haría pensar en casas grandes y pequeñas, callejuelas y avenidas, zonas viejas y barrios modernos. La comparación todavía puede ser inadecuada, como cualquier metáfora si se toma al pie de la letra, pero al menos sirve para una mejor comprensión: la investigación de fundamentos no es sino un barrio más, junto a otras zonas o «ramas» de la matemática. Los resultados que aquí se obtengan pueden afectar al estado y la configuración de aquéllas, pero esto es la norma y no la excepción en las relaciones entre los peculiares barrios de la *polis* matemática.

En lugar de pensar en términos de la metáfora de los fundamentos y sus crisis, De Lorenzo prefiere situar en el centro de sus consideraciones la praxis matemática, lo que suele llamar el Hacer matemático (véanse las págs. 31-34). La idea aquí es que los conceptos y fórmulas, las teorías matemáticas, no son sino resultados o productos de un trabajo de la razón humana; una razón que construye conceptos y sistemas conceptuales, y que históricamente ha trabajado siguiendo distintos estilos y marcos o formas de hacer. En ocasiones la praxis

matemática se transforma y comienza a desarrollarse siguiendo las líneas de nuevas ideas fundamentales o conceptos-núcleo, lo que a su vez fuerza cambios en los métodos demostrativos, en las formas de definición, en las notaciones, etc. «Procesos que implican que la praxis matemática es temporal, dinámica y no estática, por lo que cualquier pretensión de establecer unos cimientos o fundamentos únicos y atemporales o ya definitivos para esa praxis [...] carece de sentido».

No podemos hacer menos que suscribir estas líneas y esas ideas, indicando también que lo que se está diciendo tiene implicaciones, y profundas, para la concepción de la ciencia en general. En nuestra tradición cultural ha sido habitual concebir la ciencia (sustitúyase aquí «matemática» si se quiere) como un conjunto de teorías plenamente desarrolladas. Frente a esta concepción idealizada y estática, de clara raigambre platónica, se alza la concepción de la ciencia como una actividad humana, una actividad cuyos *productos* son las teorías, que como tales productos están siempre sujetos a alteraciones, desarrollos o reformas. La imagen de la ciencia como actividad, frente a la ciencia como teoría, subyace a las revolucionarias concepciones que en los años sesenta propusieron Thomas Kuhn y otros autores. Fue en la misma época cuando Javier de Lorenzo llegó a ese género de ideas y consideraciones; y sin duda no por casualidad, ya que este tipo de transformaciones son de las que «están en el aire», es decir, de las que se imponen con carácter comunitario, recordándonos la dimensión intrínsecamente social del conocimiento humano.

Según una narrativa de manual, ya muy manida y obsoleta, la crisis de fundamentos en matemáticas habría surgido del descubrimiento de contradicciones –las llamadas «paradojas»– en lógica y teoría de conjuntos. De Lorenzo nos recuerda lo que han señalado diversos historiadores. Por ejemplo el norteamericano Gregory H. Moore o el mexicano Alejandro Garciadiego.: que esa narrativa es inadecuada e incompatible con numerosos datos históricos, y que el debate sobre fundamentos tuvo otros condicionantes, quizás más profundos. Introduciendo la perspectiva de la praxis matemática, lo que sucedió es que desde mediados del siglo XIX había surgido un nuevo estilo de trabajo matemático, lo que De Lorenzo llama el Hacer Global y que otros llamamos –siguiendo el uso de los propios matemáticos– la matemática abstracta o conjuntista-estructural. Esta forma de hacer matemáticas se diferencia de la anterior –que nuestro autor llama Figural–, la cual estaba centrada en elementos concretos como pueden ser las figuras geométricas o las cantidades, y orientada hacia la elaboración de algoritmos. El hacer «global» de la matemática abstracta introduce un giro hacia los conceptos puros, alejándose de lo que parecía intuitivo y concreto, y empleando como conceptos-núcleo los de conjunto y función. Semejante transformación o incluso inversión del modo de hacer matemáticas no podía suceder sin dar lugar a vivas discusiones y al problema de cómo dar cuenta de la nueva manera de obtener

conocimiento matemático. Estas discusiones y problemas, que surgen unos treinta años antes de la aparición de las «paradojas», es en lo que realmente consistió el debate de fundamentos, que por otro lado no supuso ninguna crisis para la nueva praxis matemática.

Una segunda tesis del libro que nos ocupa consiste en defender que en la actividad matemática los investigadores no se limitan a resolver problemas o demostrar teoremas en un contexto de precisión y rigor absolutos, sino que construyen y transforman conceptos, crean formas demostrativas, y elaboran modelos posibles de lo real. Idea esta última que no constituye el centro de atención del libro, pero que tiene un enorme interés, relaciones claras con los resultados que se obtuvieron en el debate sobre fundamentos, y relevancia incluso para la imagen que tenemos de la matemática (y para la que se proyecta desde los centros educativos). Al elaborar modelos posibles de lo real, los matemáticos participan en el desarrollo científico dentro de su dimensión conceptual; como decía Einstein, «la experiencia sigue siendo, por supuesto, el único criterio de utilidad de las construcciones matemáticas; pero el principio creativo reside en las matemáticas». Frases como esta merecerían reflexiones detalladas, pero lamentablemente queda lejos de ellas la imagen de torre de marfil, perfectamente aislada y «pura», que de la matemática se arroja en la mayoría de nuestras universidades.

Esa segunda tesis se complementa con la afirmación de que el Hacer matemático, en tanto producción y producto humano, va ligado a un cierto tipo de sociedad (industrial y capitalista). En cierto modo, este tipo de lectura de raigambre marxista estaba implícita en la visión de la «crisis» que hemos esbozado más arriba: primero vino la nueva praxis, que continuó en su desarrollo a pesar de las discusiones, y a remolque de ella surgieron los intentos de fundamentación; «la fundamentación se muestra como ideología, es decir, visión totalizante que intenta racionalizar y justificar una praxis previa». Ahora bien, afirmaciones como la anterior hacen que a uno le surjan preguntas bien difíciles. Si es cierto que la matemática que conocemos es solidaria de un tipo de sociedad, y suponiendo cierto también que esa forma social está cambiando en la dirección de una sociedad post-industrial marcada por un capitalismo global, ¿qué tipo de cambios habría que esperar para la praxis matemática? No es este, sin embargo, el lugar para intentar una respuesta, siempre arriesgada, a esa pregunta, ni tampoco para juzgar sus presupuestos.

Convendrá acabar con algunos comentarios dirigidos al lector potencial de la obra que nos ha ocupado. Hay en ella partes que muchos podrán leer con buen provecho, como el capítulo 1, el 2 (en el que, por cierto, hay que destacar lo interesante del énfasis puesto en la geometría proyectiva como elemento configurador de la nueva matemática) La cuestión había sido tratada hace muchos años, en un artículo magnífico centrado en cuestiones lógicas, por el gran filósofo norteamericano Ernest Nagel., y el 5 (que aclara distintas concepciones del

método axiomático, y discute asuntos tan interesantes como la polémica entre Frege y Hilbert) Por otro lado, creo que no todos estarán de acuerdo en la interpretación del carácter «existencial» del nuevo método axiomático.. Pero no puedo ocultar mi impresión de que el conjunto de la obra no es de fácil lectura. Por un lado, está la abundante terminología propia que introduce el autor: «Hacer Figural», «Hacer Global», «estilos», «ideograma»..., y que en ocasiones (como sucede con la primera o la última de las expresiones citadas) no recibe explicación detallada, sino que el autor remite a otras obras suyas. Pero sobre todo, se trata del estilo expositivo muy sintético y a veces elíptico, que convierte a este libro en uno de aquellos que se hubieran dejado leer mucho más rápido de no haber sido tan cortos.

En realidad, creo que cualquier lector notará esas dificultades nada más recorrer algunas páginas de la introducción, y por ello es importante insistir en que no todo el texto plantea ese nivel de complejidad. En opinión del que suscribe, hay que lamentar que, con unas cincuenta páginas más de texto, De Lorenzo hubiera podido introducir elementos de divulgación que habrían abierto significativamente el abanico de lectores. En la versión publicada, en cambio, la excesiva concisión hará que muchas referencias resulten incomprensibles a los no iniciados, e incluso es de temer que algunos pasajes puedan inducir a los lectores a errores conceptuales. Esto es lamentable en la medida en que las tesis principales del libro son muy esclarecedoras, y en tanto en cuanto los libros de este género y temática son *rara avis*, y bien rara, en nuestra lengua. Confiémos en que los defectos indicados se puedan subsanar, caso de considerarlo oportuno, en una segunda edición.

Autor: JAVIER DE LORENZO

Título: La matemática de sus fundamentos y crisis