Con la colaboración del
COLEGIO LIBRE DE EMÉRITOS

RdL Revista de Libros
SEGUNDA ÉPOCA

CIENCIA nº 87 | 01/03/2004

La comedia de los colores

Jim Holt

ROBIN WILSON
Four colour suffice: How the map problem was solved
Princeton University Press

Hace un siglo y medio, un estudiante que estaba coloreando un mapa de Inglaterra se dio cuenta de que sólo necesitaba cuatro colores para completar su tarea, esto es, para asegurarse de que condados limítrofes, como Kent y Sussex, no tuvieran el mismo color. Esto le hizo suponer que cuatro colores serían suficientes para cualquier mapa, real o inventado. Le comentó esta conjetura sin fundamento a su hermano. Éste la comentó a su vez a un distinguido matemático quien, tras realizar una serie de experimentos para ver si parecía plausible, intentó, sin conseguirlo, demostrar que era cierta.

En las décadas siguientes, muchos otros matemáticos, amén de innumerables aficionados –incluidos un gran poeta francés, un fundador del pragmatismo estadounidense y al menos un obispo de Londres– se vieron enfrascados y confundidos, asimismo, por el problema del mapa. Tan fácil de enunciar que un niño puede entenderla, la «conjetura de los cuatro colores» pasó a rivalizar con el último teorema de Fermat como el más famoso acertijo de todas las matemáticas. Finalmente, en 1976, el mundo recibió la noticia de que la conjetura se había resuelto. Cuando quedó claro cómo se había logrado, sin embargo, la atmósfera festiva dio paso a la desilusión, el escepticismo y el rechazo total. Lo que había sido un problema en términos de pura matemática dio paso a una cuestión filosófica o, mejor, dos: ¿cómo justificamos nuestras pretensiones de conocimiento matemático? Y, ¿puede la inteligencia artificial ayudarnos a aprehender verdades a priori?

A pesar de todo su interés matemático y filosófico, el problema del mapa no posee ninguna importancia práctica evidente, al menos no para los cartógrafos, que no muestran tendencia alguna a reducir el número de colores que utilizan. Aun así, resulta instructivo abordar el problema echando una ojeada a un atlas. Busquemos un mapa de Europa y observemos la parte integrada por Bélgica, Francia, Alemania y Luxemburgo. Cada uno de estos países comparte una frontera con los otros tres, por lo que resulta muy evidente que no podrán diferenciarse con menos de cuatro colores. Podría pensarse que se necesitarían cuatro colores sólo cuando un mapa contuviera un cuarteto de regiones mutuamente vecinas como éste. Si es así, busquemos un mapa de Estados Unidos y fijémonos en Nevada junto con los cinco estados que lo rodean (California, Oregón, Idaho, Utah y Arizona). Ninguno de estos cuatro estados son mutuamente vecinos del modo que lo son Bélgica, Francia, Alemania y Luxemburgo. Pero el conjunto de todos ellos no puede distinguirse con menos de cuatro colores, como puede comprobarse fácilmente. Por otro lado –y esto puede que haga que su intuición se tambalee un poco–, Montana y los seis estados que lo rodean pueden diferenciarse con simplemente tres colores.

Algunos mapas necesitan cuatro colores: se trata de algo evidente. Lo que afirma la conjetura de los cuatro colores es que no hay ningún mapa posible que necesite más de cuatro colores. ¿En qué estribaría «resolver» esta conjetura? Existen dos posibilidades. Supongamos –como han creído algunos matemáticos– que la conjetura es falsa. En ese caso, dibujar un solo mapa que requiriera cinco o más colores dejaría el asunto zanjado (en el *Scientific American* de abril de 1975, Martin Gardner publicó un complejo mapa, integrado por 112 regiones, que no podía colorearse –defendía– con menos de cinco colores. Cientos de lectores enviaron copias del mapa que habían coloreado laboriosamente con sólo cuatro colores, quizá sin darse cuenta de que Gardner estaba gastando una pequeña inocentada). Para establecer que la conjetura de los cuatro colores es cierta, por el contrario, habría que mostrar que cualquier mapa concebible, y el número de ellos es infinito, podría colorearse con sólo cuatro colores, al margen de cuán numerosas, enrevesadas y serpenteantes pudieran ser sus regiones.

La sencillez de la conjetura de los cuatro colores es, por tanto, engañosa. La deliciosa historia de la búsqueda de su resolución contada por Robin Wilson, una buena parte de la cual se lee como una comedia de los errores, deja claro cuán engañosa es. Francis Guthrie, el estudiante de Londres que fue el primero en suponer en 1852 que bastaban cuatro colores, imaginó aparentemente que también había demostrado la conjetura. Aunque Guthrie llegaría a ser más tarde catedrático de matemáticas en Sudáfrica, nunca publicó nada sobre el problema del mapa, prefiriendo, parece, satisfacer su interés por la botánica (una especie de brezo fue bautizada con su nombre). Sí que habló de él, sin embargo, con su hermano menor, Frederick, que fue quien informó a Augustus de Morgan, su profesor de matemáticas. De Morgan fue un matemático muy competente y una figura importante en el desarrollo de la lógica. Intrigado por el problema de los cuatro colores, creció obsesionado con la idea de que si un mapa contenía cuatro regiones mutuamente vecinas, una de ellas debía estar completamente rodeada por las otras tres (como, volviendo al ejemplo anterior, Luxemburgo está completamente rodeado por Bélgica, Francia y Alemania). Creía, muy equivocadamente, que este «axioma latente» era la clave para demostrar la conjetura, que no dejó de desconcertarlo hasta su muerte en 1871.

De Morgan fue el primero en mencionar la conjetura de los cuatro colores en letra impresa: lo hizo una reseña de filosofía sin firmar que escribió en 1860 para una popular revista literaria, el *Athenaeum*. La noticia cruzó el Atlántico hasta Estados Unidos, donde el filósofo Charles S. Peirce fue presa de su hechizo. Peirce declaró que era «una deshonra para la lógica y las matemáticas que no se hubiera encontrado una demostración para una proposición tan sencilla» y presentó su propia propuesta de demostración en una sociedad matemática de Harvard a finales de la década de 1860. No se conserva en ningún documento. Más tarde, sin embargo, Peirce tuvo que reconocer el avance debido a otra persona, que ayudó a hacer público en una noticia aparecida en *The Nation* el día de Navidad de 1879. Al hacerlo así, Peirce ratificaba sin darse cuenta la que acabaría convirtiéndose en la más famosa prueba errónea de la historia de las matemáticas.

Este es, quizás, un buen lugar para decir algo sobre cómo actúan los matemáticos a la hora de demostrar proposiciones, especialmente las que, como la conjetura de los cuatro colores, comprenden un número infinito de casos. Un posible enfoque es el método de la inducción matemática. Esto se compara a veces con hacer caer una fila interminable de fichas de dominó. El paso crucial en la inducción matemática es mostrar que si tal afirmación es cierta para el número n, entonces también lo será para $n+1$. En el símil del dominó, esto significa que cada ficha que cae empuja a su inmediata sucesora, lo que asegura que todas ellas acabarán cayendo. Para aplicar la inducción matemática al problema del mapa habría que mostrar que si cualquier mapa con n regiones puede colorearse con cuatro colores, entonces puede serlo cualquier mapa que tenga $n+1$ regiones. Esto resulta extraordinariamente difícil de hacer. Cuando se añade la región $(n+1)$ª a un mapa dado, podrían tener que recolorearse algunas o todas las n regiones restantes para hacer que la nueva encaje en el esquema de cuatro colores. Nadie ha sido capaz de encontrar una fórmula general para una recoloración así. Y el símil de la caída en cadena de las fichas de dominó ya no da más de sí.

Felizmente, hay otra estrategia para demostrar una proposición de alcance infinito: la prueba por contradicción. Se toma la negación de lo que se quiere establecer y se muestra que conduce al absurdo. En el caso de la conjetura de los cuatro colores, esto significa fingir que existen contraejemplos de la conjetura –mapas que necesitan cinco o más colores– y a continuación llegar a una contradicción a partir de esa suposición. Como este tipo de contraejemplos violarían el principio de los cuatro colores, normalmente reciben el nombre de «criminales». Los mapas criminales, si existieran, podrían contener cualquier número de regiones, pero resulta útil centrarse en los que tengan el número más pequeño posible. Éstos se conocen como criminales *mínimos* (obviamente, un criminal mínimo tendría que tener al menos cinco regiones para necesitar cinco colores). Es seguro que cualquier mapa con menos regiones que un criminal mínimo se ajustará, por definición, a la ley, esto es, será coloreable con cuatro colores.

Ahora nos encontramos en una posición interesante. Supongamos que cogemos un criminal mínimo, elegimos una de sus regiones y la reducimos hasta convertirla en un punto. El mapa resultante, que contiene una región menos, debe ajustarse a la ley. Por tanto, puede colorearse con cuatro colores. Hágalo. Ahora recupere la región reducida devolviéndole de nuevo su tamaño. Si eligió esa región con buen criterio, puede que exista un modo de incorporarla en el nuevo esquema de cuatro colores. Si, por ejemplo, la región que eligió tenía una frontera con sólo otras tres regiones, entonces está de suerte: cuando la recupere con el nuevo sistema de cuatro colores, quedará un color disponible para esta región que la distinguirá de sus tres vecinas. Pero entonces ha conseguido colorear el mapa original con cuatro colores, de modo que el supuesto criminal mínimo no era al fin y al cabo un criminal. Está claro que ningún mapa que aspire a ser un criminal mínimo puede contener una región que sea fronteriza con sólo otras tres regiones. Si todos los mapas contuvieran algún tipo semejante de «configuración reducible», entonces ningún mapa podría ser un criminal mínimo. Pero que no haya criminales mínimos significa que no hay criminales, y punto (si existen los mapas criminales, algunos deben estar más abajo en cuanto al número de regiones). Y que no haya criminales significa que todos los mapas deben ajustarse a la ley, esto es, ser coloreables con cuatro colores.

Fue valiéndose precisamente de esta lógica cómo Alfred Bray Kempe, un abogado y matemático aficionado londinense, afirmó haber demostrado en 1879 la conjetura de los cuatro colores. El razonamiento de Kempe estaba repleto de complejidades matemáticas, pero parecía convincente, y no sólo a Charles S. Peirce. Destacados matemáticos de Gran Bretaña, del continente y de Estados Unidos coincidieron en que era la solución largo tiempo buscada del problema del mapa. Kempe entró a formar parte de la Royal Society y posteriormente fue nombrado caballero. Su «prueba» resistió una década, hasta que se encontró un error sutil pero fatal. El hombre que detectó este error era un filólogo clásico y matemático llamado Percy Heawood, o *Pussy* Heawood para sus amigos por su bigote semejante al de un gato.

Heawood, que casi pidió disculpas por invalidar el resultado, tenía rarezas personales que lo hacían sobresalir incluso en esta saga plagada de excéntricos. Enjuto y ligeramente encorvado, vestía normalmente con un extraño modelo de capa de Inverness y llevaba una cartera prehistórica. Su compañero habitual era un perro, que le acompañaba a sus conferencias. Sentía «pasión por los comités y pensaba que un día era un día malgastado si no asistía al menos a una reunión de un comité», nos cuenta Wilson. Sólo ponía en hora su reloj, que atrasaba, una vez al año, el día de Navidad, y luego hacía los cálculos necesarios en su cabeza cuando necesitaba saber la hora. «¡No, no está dos horas adelantado –le insistió en una ocasión a un colega–, está diez horas atrasado». Pero no carecía de talentos prácticos: cuando el castillo de Durham, del siglo XI , estuvo a punto de despeñarse por la roca sobre la que estaba construido y caer al río Wear, Heawood, casi en solitario, consiguió los fondos necesarios para salvarlo.

Four Colors Suffice está sembrado de buenas anécdotas y el autor, profesor en el Keble College de Oxford, demuestra también su habilidad a la hora de hacer las matemáticas accesibles. Para muchos lectores, sospecho, el clímax intelectual del libro llegará cuando se les brinda una elegante demostración del «teorema de los seis colores». Es semejante a la conjetura de los cuatro colores pero, evidentemente, menos sólido: afirma que seis colores son suficientes para colorear cualquier posible mapa, de tal modo que las regiones limítrofes se coloreen de modo diferente. Merece la pena reparar en el teorema de los seis colores porque revela las raíces matemáticas del problema del mapa, que se remontan a mediados del siglo XVIII y al gran matemático suizo Leonhard Euler (cuyo nombre, tiene la consideración de informarnos Wilson, se pronuncia «oiler»). Euler fue, quizás, el matemático más prolífico de la historia. Entre los descubrimientos que hizo, a caballo entre las cortes de Federico el Grande y Catalina la Grande, fue la fórmula $V - A + C = 2$, que no hace mucho tiempo fue votada como el segundo teorema más hermoso de las matemáticas[1]. La fórmula de Euler vale para cualquier poliedro, es decir, para cualquier sólido unido por superficies planas, como un cubo o una pirámide. Afirma que si se cuentan los vértices del poliedro (V), se les resta el número de aristas (A) y luego se añade el número de caras (C), el resultado es siempre 2. Un cubo, por ejemplo, tiene 8 vértices, 12 aristas y 6 caras. Y, en efecto, $8 - 12 + 6 = 2$.

¿Qué tienen que ver los poliedros con los mapas? Bueno, si se coge un poliedro y, tras un poco de cirugía, se lo aplana, cada cara se asemeja a la región de un mapa. A la inversa, puede cogerse un mapa y hacer de él un poliedro. Los tamaños y formas de las regiones se verán alterados en el proceso, pero eso no afecta a la configuración global del mapa o al número de colores que necesita. La conjetura de los cuatro colores es, por tanto, un problema de topología, la rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades que no se ven alteradas por el estiramiento y el retorcimiento.

Supongamos que aplicamos la fórmula de Euler a un mapa. C pasa a ser el número de regiones, A el número de fronteras y V el número de puntos en que las fronteras forman una intersección. Entonces puede derivarse un resultado que es crucial para el problema del mapa: todo mapa debe tener al menos una región con cinco o menos vecinos inmediatos. Esto es agradablemente fácil de demostrar. Si hubiera algún mapa en el que toda región tuviera al menos seis vecinos, entonces, contando las regiones, fronteras y puntos, y aplicándoles la fórmula de Euler, se obtendría el extraordinario resultado de que 0 = 2. ¡Contradicción! Está garantizado, por tanto, que alguna región en todos los mapas es fronteriza de otras cinco regiones o menos.

Con este resultado en la mano, es cuestión de un momento demostrar el teorema de los seis colores. Supongamos que hubiera mapas criminales que necesitaran siete o más colores. Cojamos un criminal mínimo. Como debe tener al menos una región con cinco vecinos o menos, cojamos esa región y reduzcámosla a un punto. Coloreemos el mapa reducido, que debe ajustarse a la ley, con seis colores. Ahora reintegremos la región reducida. Como tiene cinco vecinos o menos, debe haber un color sobrante para ella entre los seis colores disponibles. Esto contradice la suposición de que el mapa era un criminal mínimo, demostrando el teorema de los seis colores.

Wilson explica con lucidez la lógica que se esconde detrás de todo esto. Puede retenerse mentalmente y «ver» por qué el teorema de los seis colores ha de ser cierto. La prueba es sorprendente e inevitable al mismo tiempo; es casi graciosa. Eso es, estéticamente hablando, lo mejor que nos brinda el problema del mapa. El método que Kempe utilizó en 1879 para reducir el mínimo de seis colores hasta los cuatro deseados fue tortuoso; no se basó en ideas matemáticas profundas; y contenía, por si fuera poco, un paso erróneo. Sin embargo, cuando Heawood detectó su error, pudo salvar lo bastante del argumento para mostrar que todo mapa podía colorearse con cinco colores o menos (Wilson nos da detalles de la prueba, pero son demasiado tediosos de seguir).

Otras personas que se sintieron atraídas por la conjetura de los cuatro colores fueron Frederick Temple, obispo de Londres y más tarde arzobispo de Canterbury, que publicó una demostración errónea; o el poeta francés Paul Valéry, que nos legó una docena de páginas de sólida reflexión sobre el problema en su diario de 1902. Algunos pensaban que el irritante asunto sería despachado en cuanto un matemático realmente de primera línea se interesara por él. El gran Hermann Minkowski intentó sacarse una demostración de la manga durante una de sus conferencias en la Universidad de Gotinga; después de desperdiciar varias semanas de clases buscándola, anunció a sus alumnos: «El cielo se ha enfadado por mi arrogancia. Mi demostración [...] también es defectuosa». Otros destacados matemáticos, quizá sabiamente, hicieron la vista gorda al problema. No se hallaba realmente, al fin y al cabo, en la corriente principal de las matemáticas. Cuando David Hilbert, quizás el matemático más eminente de su época, expuso ante un congreso internacional celebrado en París en 1900 los que él consideraba los veintitrés problemas más importantes de las matemáticas, la conjetura de los cuatro colores no se encontraba entre ellos.

A pesar de ello, su notoriedad y su carácter esquivo siguieron ejerciendo un atractivo irresistible para los matemáticos a ambos lados del Atlántico (algunos de los cuales acabaron lamentándose del tiempo que le dedicaron). La estrategia que se siguió fue esencialmente la que utilizó Kempe: encontrar todos los resquicios que permitieran encontrar contraejemplos para la conjetura de los cuatro colores, y a continuación cerrarlos. Para que esto funcione, por supuesto, el número de resquicios debe ser finito; de lo contrario, no podrían comprobarse todos y mostrarse cerrables. Según iba avanzando el siglo XX , algunos matemáticos encontraron modos ingeniosos de producir series completas de resquicios; otros encontraron modos igualmente ingeniosos de cerrarlos. El problema era que estas series de resquicios (denominadas «series inevitables») eran absurdamente amplias y constaban de hasta diez mil configuraciones de mapas. Y cerrar un resquicio dado (mostrando que la configuración en cuestión era «reducible») podía ser una tarea monumentalmente laboriosa, hasta el punto de que no podía llevarla a cabo ningún matemático humano. En los años sesenta, sin embargo, una serie de personas que trabajaban en el problema habían empezado a sospechar que el proceso de comprobación de resquicios podría hacerse suficientemente rutinario como para llevarse a cabo por medio de un algoritmo mecánico. Eso despertaba una posibilidad interesante: la conjetura de los cuatro colores podría quizá demostrarse con la ayuda de un ordenador.

Los matemáticos –esto es algo que debe señalarse– fueron lentos a la hora de entusiasmarse con los ordenadores. Tradicionalmente, a partir de Pitágoras, han confiado en el pensamiento puro y duro para obtener el conocimiento de nuevas verdades. Solía decirse que un departamento de matemáticas era el segundo más barato en términos de inversión para una universidad, porque sus miembros necesitaban únicamente lápices, papel y papeleras (el más barato sería el de los filósofos, porque no necesitan las papeleras). En una fecha tan tardía como 1986, un matemático de Stanford presumía de que su departamento tenía menos ordenadores que ningún otro, incluido el de literatura francesa. En cualquier caso, la conjetura de los colores parecía inicialmente demasiado vasta incluso para un ordenador. Parecía como si hiciera falta un siglo para examinar todos los casos con la máquina más rápida. Pero a comienzos de los años setenta, Wolfgang Haken, un matemático de la Universidad de Illinois, refinó la metodología. Junto con Kenneth Appel, un programador de talento, inició una suerte de diálogo con el ordenador con el propósito de reducir el número de resquicios y taparlos más eficazmente. «Elaborará estrategias complejas basadas en todos los trucos que se le han `enseñado' –afirmó más tarde Haken de la máquina– y a menudo estos métodos fueron mucho más inteligentes de los que nosotros habríamos intentado».

Sin que Appel y Haken lo supieran, otros investigadores repartidos por todo el mundo, en Ontario y Rodesia y en Harvard, estaban aproximándose a una solución valiéndose de métodos similares. Entre tanto, al menos un matemático seguía intentando construir un intrincado mapa que requería cinco colores. En junio de 1976, tras cuatro años de fiero trabajo, mil horas de ordenador y una ayuda crucial recibida de un profesor de literatura de Montpellier, Haken y Appel consiguieron su resultado: cuatro colores bastaban realmente. La historia la hizo pública *The Times* de Londres ese mismo mes[2]. La conjetura de los cuatro colores se había convertido en el teorema de los cuatro colores.

¿O no? Al margen de cómo interpretara esta noticia el mundo en general, muchos matemáticos reaccionaron acerbamente cuando supieron de los detalles que se escondían tras ella. «Admitir los chanchullos informáticos de Appel y Haken en el rango de las matemáticas sólo nos dejaría intelectualmente frustrados», fue un típico comentario citado por Wilson. Había tres causas diferentes para esa infelicidad. La primera era estética. La demostración no era bonita; su enumeración de casos, como si fuera un *bulldozer,* no conseguía seducir ni encantar al intelecto. Y, como Godfrey Harold Hardy declaró en cierta ocasión, «en el mundo no hay un lugar permanente para las matemáticas feas». La segunda razón tenía que ver con la utilidad. Una buena demostración debería contener argumentos novedosos y revelar estructuras ocultas que puedan aplicarse en otros casos en matemáticas. La demostración de Haken-Appel parecía estéril a este respecto. Tampoco daba pistas para comprender por qué el teorema de los cuatro colores era cierto. La respuesta se hallaba allí como «una monstruosa coincidencia», por decirlo en palabras de otro matemático.

La tercera y más importante razón era epistemológica. ¿El logro de Haken y Appel aportaba realmente bases para afirmar que sabemos que la conjetura de los cuatro colores es cierta? ¿Se trataba realmente de una demostración? Idealmente, una demostración es un argumento que puede traducirse a un lenguaje formal y verificarse por medio de las pruebas de la lógica. En la práctica, los matemáticos nunca se preocupan de este tipo de demostraciones formales, que serían extremadamente voluminosas. Lo que hacen, en cambio, es que sus argumentos sean razonablemente rigurosos explicando en detalle el número suficiente de pasos para convencer a los expertos en su campo. Para que un argumento sea convincente debe ser «examinable», esto es, debe poder ser aprehendido por la mente humana y escrutado en busca de errores.

La parte humana del argumento, que abarca unas novecientas páginas, era suficientemente imponente. Pero la parte *in silico,* que ocupaba un número de páginas impresas por ordenador de 1,2 metros de altura, no podría verificarse nunca humanamente, incluso aunque todos los matemáticos del mundo se dedicaran a esta tarea. Es como si un estadio clave del razonamiento hubiera sido proporcionado por un oráculo en la forma de una larga secuencia de «síes». Con que uno solo de estos «síes» debiera ser un «no», toda la demostración carecería de valor. ¿Cómo podríamos estar seguros de que el programa de ordenador no contenía un virus? Para comprobar el resultado de Haken-Appel, los evaluadores acudieron a diseñar un programa informático propio, el modo en que un científico podría duplicar un experimento realizado en un laboratorio diferente. En una influyente ponencia publicada en 1979 en *The Journal of Philosophy* , «The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance» (El problema de los cuatro colores y su relevancia filosófica), el filósofo, ya fallecido, Thomas Tymoczko defendía que este tipo de experimentos de ordenador introducían un elemento empírico en las matemáticas. Casi todos los matemáticos creen actualmente que el teorema de los cuatro colores es cierto, pero lo hacen sobre la base de una evidencia corregible. Es notorio que el teorema no se ajusta al ideal platónico de un conocimiento cierto, absoluto, apriorístico. Lo más que podemos decir es que es *probablemente* cierto, como las teorías de la física en que se basa la operación de la máquina que ayudó a demostrar el teorema.

El avance que llegó de mano del teorema de los cuatro colores marcó un cambio en la práctica matemática. Desde entonces se han resuelto otras conjeturas con la ayuda de ordenadores (especialmente, en 1988, la no existencia de un plano proyectivo de orden diez). Entre tanto, los matemáticos han ordenado el argumento de Haken-Appel, de tal modo que la parte informática es mucho más breve y algunos confían aún en que algún día se encontrará una demostración tradicional, elegante y esclarecedora del teorema de los cuatro colores. Fue el deseo de esclarecimiento, en fin de cuentas, lo que provocó que tantos trabajaran en el problema durante su dilatada historia, incluso hasta el punto de dedicar sus vidas a ello (un matemático tuvo a su esposa coloreando mapas durante su luna de miel). A pesar de que el teorema de los cuatro colores sea matemáticamente superfluo, se creó un montón de matemática útil en los fallidos intentos por demostrarlo y ha sido de provecho sin duda para los filósofos en las últimas décadas. No estoy seguro de que tenga repercusiones más amplias. Cuando observé el mapa de Estados Unidos en la contracubierta de un enorme diccionario, me di cuenta con una leve sorpresa de que estaba coloreado exactamente con cuatro colores. Desgraciadamente, sin embargo, los estados de Arkansas y Louisiana, que son limítrofes, eran ambos azules.

---

[1] El vencedor del concurso, según un estudio publicado en 1988 en *The Mathematical Intelligencer* fue e i = –1.

[2] *The New York Times,* más cauteloso, esperó dos meses antes de reconocer la solución en una columna de opinión de Lipman Bers (no «Lipton Bers», como escribe el autor), un eminente matemático de Columbia.